**第一章 量子物理簡介：從偏振的角度出發**

**1.1 光束的偏振**

**1.1.1定義與基本測量**

 光是一種電磁波，電磁場震盪方向與光波行進方向垂直。偏振方向指的是電場震盪方向。測量偏振方向，我們可以利用偏振片。作為一種濾光器，偏振片的分子或結晶結構，有一特定軸(譯註：以下稱為偏振片方向)，讓只有特定偏振方向的光，才能通過偏振片。

 我們可以將偏振光通過偏振片，想成一根金屬棒要通過一個窄門。唯有將金屬棒直立，才能過這個窄門。同樣地，唯有特定偏振方向的光波才能通過偏振片。

 然而，這樣的比喻有其限制。金屬棒只有垂直方向才能通過，其餘皆無法通過。相較之下，可將偏振方向視為一向量。即使與偏振片方向之間有一夾角，其平行偏振片方向之分量，亦可通過偏振片，而垂直分量則被反射或其能量被耗散成熱能(譯註：偏振片有吸收型與反射型兩種。在此例子中，吸收型偏振片會將垂直分量的能量予以吸收。反射型偏振片則會將垂直分量予以反射)。

 想像一偏振片，其偏振片方向為垂直方向。你將一能量強度為，偏振方向與垂直方向之間，夾角為之光束，往偏振片送去。假設透射與與反射之能量強度，分別為以及。其透射光與反射光之偏振方向分別是垂直方向(與偏振片方向平行)與平行方向(與偏振片方向垂直)。

 能量守恆給我們有以下關係式

 (1.1)

 接下來，想像射入偏振光的光束能量強度增加一倍。既然可以為任意值，雖然增加一倍(變成)，但是透射與與反射之能量強度的比值()不變。與也應該增加一倍(分別變成2*IT* 與2*IR*)。我們有

 (1.2)

 我們也可以觀察到與分別正比於。我們因此可得到以下關係

 (1.3)

其中與為不小於零的常數。我們將(1.3)式代入(1.1)式，我們可推出

 (1.4)

與可寫成與譯註：直覺上，與應該與有關。實驗告訴我們若，，；若，，。)。最後，我們可以得到

 (1.5)

在電磁學中，此結果((1.5)式)又稱為馬勒定律(Malus' law)。

**1.1.2 多個偏振片的情形**

讓我們考慮設置兩塊偏振片，其偏振方向皆為水平方向(圖1.1)。若通過第一片偏振片後之光束(譯註：此光束之偏振方向為水平方向)，其能量強度為通過第二個偏振片之光束，其能量強度為。與之關係為何? 答案是：光束行進中若無能量散失，則。

圖1.1 : 兩片偏振片，其偏振片方向同向。

 但若第二片之偏振片方向成為垂直之時，情況會是如何(圖1.2)? 此時為零(譯註：通過第一片偏振片的光束，完全無法通過第二片)。

圖1.2 : 兩片偏振片，其偏振片方向相互垂直。

 若在兩偏振片中間，再加一片偏振片會如何(圖1.3)? 如果我們插入了更多的偏振片，從上述兩個情形，我們期待光束的強度應該是降低或是保持不變，因為有些光已經被濾掉，能量不可能增加才對。重點是：如果中間偏振片的方向，與前後兩片之方向之間的夾角，與前後兩偏振片之方向之夾角不同時，則強度反而可能會增加！舉例而言(譯註：參考圖1.3)，若中間的偏振片方向與水平夾角45°，則通過中間偏振片，光束強度為(譯註：此時對應的為，)。而通過最後偏振片之光束強度，應該是入射前的一半，也就是 。

∥圖1.3 : 在兩片偏振片方向相互垂直的偏振片，在中間插入另一片偏振片。其插入之偏振片之方向，與前後兩片之方向，夾角皆為45°。(譯註：前後兩片之角為90°，不等於45°)。∥

 因此偏振片不只是阻擋一部份光的濾光器。這也是馬勒定律與之前式子所推導出來的結果，也可以在實驗室得到驗證。第一次遇到與直覺相違背的現象，總會令人驚訝，而我們必須相信觀察結果，與其被實驗驗證的的物理定律。

 現在我們考慮第一片偏振片，與中間的及最後的偏振片，夾角分別為及。通過最後一片偏振片時，其強度為何? 根據式子(1.5)，我們知道通過中間的偏振片的光束強度()，為通過第一片偏振片的光束強度，再乘以。既然中間的及最後的兩片偏振片之間，其方向夾角為。則通過最後偏振片的光束強度為乘以。請注意：光強度僅與兩偏振片方向之間的夾角有關，而與偏振片方向無關。

**習題 1.1.** 一水平偏振之光束，其強度為，欲連續通過*N*片偏振片。第一片偏振片方向與水平夾角為。兩鄰近之偏振片方向也是，所以最後一片偏振片方向，剛好是垂直。通過最後一片偏振片的光強度為何? 偏振方向為何? (注意: 忽略反射的影響，只考慮透射光。)

**1.1.3 偏振方向的向量表示**

 在力學裡，我們可選取空間上三個方向，作為座標軸；眾所周知，這樣的選取可以是任意的。同樣的，在考慮偏振方向時，我們一般會任意選取兩個相互垂直的方向，分別做為“水平”方向(以H表示)，與“垂直”方向(以V表示)。若將一偏振片之方向當作水平方向，則偏振方向為垂直方向之光束，將會被此偏振片完全反射(或其能量完全耗散)。

 一般而言，方向可用向量來描述。我們將垂直方向與水平方向的單位向量，分別記作與。注意到，光偏振方向指的是電場震盪方向，而非特定時間的電場方向，因此與描述的是相同的偏振方向，與也一樣。

 我們以與當作基底向量，用來描述任一種可能的偏振方向：如果電場震盪方向與H之間夾角為，其偏振方向可表示成註

 (1.6)

(註: 為簡單起見，本文在此僅考慮線偏振，圓偏振或橢圓偏振的討論也類似，不過必須引入複數。)

 若一偏振片可完全讓偏振方向為 之光通過，此時被完全反射或耗散之光束，其偏振方向與垂直，其方向為

 (1.7)

如同前述，代表之偏振方向，與相同。但是與描述的偏振方向，是與 不同(譯註：，故與兩相量夾角為π角；與兩相量夾角為2)。

**1.1.4 作為測量儀器的偏振分光鏡**

 以下我們介紹利用偏振片測量偏振。接下來，我們會利用其他儀器測量偏振，也就是偏振分光鏡(圖1.4)。如同偏振片一樣，偏振分光鏡根據偏振方向，將光分成兩道光束：舉例來說，水平偏振可透射過去，而垂直方向則被反射。此處反射光不是像偏振片所造成反射光，會沿相反方向行進，或是能量被吸收。而是會偏轉一個方向行進。

||圖1.4 用來做一般測量的偏振分光鏡。

注意：我們無法轉置儀器，使其沿角做測量。為測量任一方向的偏振，必須再加上旋光鏡(polarization rotator)。旋光鏡是由適當材料製成的平板，旋轉偏振方向



現在測量設置就容易理解了：在偏振分光鏡前，放上一個旋光鏡。如果光通過旋光鏡後之偏振方向為，則輸入的光之偏振方向為；如果光通過旋光鏡後之偏振方向為，則輸入的光之偏振方向為。

**1.1.4.1偏振重建：全像術**

我們已描述測量偏振的方式，但此測量只能分辨出兩個相互垂直的偏振光。你也許會問是否有其他測量，可以得到更多資訊：例如，若一偏振光之偏振方向可能有三種或更多的可能，我們可以藉由測量確認其偏振方向嗎？

 若只有單一光束，就無法做到；我們上述的測量已是最佳的。如果光強度夠大，則我們可對偏振做更精細的測量。在不改變偏振方向條件下，我們可藉由半透鏡，將此光束分成幾道光束。每個光束可測量不同的偏振方向。特別的是，如接下來的習題中所示，如果不知道光強度，仍可由兩個偏振方向的測量，即可完全決定光偏振方向2。這種可將偏振方向完整重建的測量，稱為全像術。

圖 1.5 線偏振的全像術。

2 如果光不一定是線偏振時，則需要三種測量。

**習題1.2**  一強度為的光束，分成兩強度皆為*I*的光束。其中一光束測量其水平方向偏振(譯註:指的是將此光束送入偏振方向為水平方向的偏振片)：結果為，。從此可推論出，偏振方向可能是，或是。請藉由其他任意方向的測量，便可從兩種可能中，找出真正的的偏振方向。提示：假設光偏振方向為：根據(1.6)與(1.7)式中的
及，則與各為多少? 將答案與，若光偏振方向為時計算出之強度相比較。

利用全像術，我們似乎總能完美的決定光偏振方向。在古典物理中，的確是如此。但在全像術中，光束必須被分成幾道強度較小的光束。如果此光束已經是最小單位，叫做一個光子時，會變成如何？這問題將我們引入量子物理。

**1.2 一個光子的偏振**

**1.2.1 對一個光子的描述**

在近代物理的發展時期，愛因斯坦為了解釋光電效應，假設光是由叫做光子的粒子所構成的，而非古典的波。在量子物理發展中，已能清楚說明光子是什麼。在本書中，我們可以假設光束是由光子所構成。

 在偏振光中，每個光子必定偶相同的偏振方向。的確，再適當的偏振片方向，光束可完全透射，亦即每個光子皆可通過偏振光。

 對於偏振方向，光子與偏振光束有不同的符號加以描述。光的偏振方向，可記為，而一個光子的偏振狀態，則寫為。這是狄拉克符號，之後本書將完全使用這符號，我們應該對它仔細研究一番。

**1.2.2 用狄拉克符號做計算**

當作數學記號，”是向量，且與一般的單位向量，有非常類似的特性。特別的是，如果讓

 (1.8)

則

 (1.9)

 如同一般向量運算，係數為兩單位向量與的內積。我們將此內積寫成

 (1.10)

同樣的，
 (1.11)

 由上述式子，我們有

 (1.12)

也就是說，是一組基底向量。

 從先前的討論，我們知道是能通過濾波器的光強度比例。但若是一光子，強度比例變為多少？一個光子是一個不能再分割的粒子，它只能通過濾波器，或是被反射回去。因此，代表的是光子能通濾波器”的*機率*(譯註：之前原文為“filter”，雖然光子被視為粒子而非波，之後仍將以之前將光視為波所使用的術語。請注意︰在量子物理中，光同時有粒子與波的特性)。若一光子之偏振方向(與水平方向之夾角)為，則我們可以說此光子通過水平與垂直偏振片的機率，分別為(譯註：為事件發生的機率)

 ，

 。

根據定義，上述兩個機率和為1。對於任意兩個偏振態及：

 。 (1.13)

(1.13)稱為波恩機率定則。

 請注意到，我們寫下，並不意味有些光子偏振方向為水平方向，而有些為垂直方向。它描述的是一個偏振態，所有的光子偏振方向為，測得水平與垂直方向偏振的機率，分別為與。

 在物理上出現機率的概念時，需要仔細的討論。在此之前，為強化理解，我們建議做完以下習題。

**習題 1.3**

(1) 證明對任一角度，為一組基底向量。其中



 (1.14)

(2) 計算及。

 之前已討論到，機率僅與兩夾角與之差相關，而與個別值無關。一般而言，一偏振方向與水平之間夾角為的偏振態，通過一偏振片方向與水平夾角為的偏振片時，決定透射機率的參數為，且

 (1.15)

**1.2.3 機率的意義**

讓我們對單光子的測量中，對於機率的意義，作一詳細的討論。考慮一些偏振態為的光子，往一水平偏振方向的偏振片前進。根據之前的討論，我們可以決定其透射與反射機率為

 (1.16)

圖 1.6 光子的難題

換句話說，我們可以預測一光束，或是許多光子的統計機率。

 現在，考慮單一光子。每個光子的偏振態都是。一個光子遇到偏振片時，將會發生什麼事？

 答案是：我們不知道。盡管知道許多光子的統計行為，我們仍無法預知每一個一光子的行為。我們對此答案並不滿足，我們想問：每一個光子中，是否有某個隱藏的機制，決定它是否通過偏振片？

 答案是：沒有。實驗上已證明並沒有這種機制。事實上我們不能預測單一光子的行為，是因為根本沒有任何資訊。

 我們接下想問，為什麼不能預測？這意味自然是隨機的嗎？上帝擲骰子嗎？

 雖然令人訝異，但答案是：“的確”。隨機是內在而固有的。為了說得更清楚，我們可以跟日常生活所遇到的隨機，像是擲硬幣、預測死亡或是天氣模式等等例子，做一比較。上述的例子中，要去預測結果是非常困難，甚至實際上是不可能的。然而，既然相關的資訊都是存在的，這些隨機並不是內在而固有的。

 量子現象中的隨機式非常不同的。我們可以測量一個光子的速率、偏振方向或時其他的參數，但是絕沒有任何方式，能判斷光子是否要通過偏振片。沒有任何資訊。這就是所謂內在而固有的隨機。

(譯註：在日常生活中，擲硬幣出現正面及反面機率各為二分之一。這是因為我們是“無知的”。如果我們知道所有相關的資訊，例如我們擲硬幣的力道，硬幣以及桌面表面的粗糙程度，風速隨時間如何變化等等，我們可以做出精確的預測，也就是說對於擲出的硬幣，我們可以確定到底會出現正面還是反面。但是，單一光子通過偏振片之前，並不存在所謂的相關資訊。所以，我們無法做出預測。)

**1.3 兩個光子的描述**

之前，我們已探討單光子的內在隨機行為，與光束通過偏振片統計結果的關係。然而，在兩個光子之間的量子特性，跟古典物理之間沒有類比。

**1.3.1 傳統的複合系統**

為了瞭解量子特性，我們先考慮古典物理中的複合系統。若是由兩個或更多的子系統，所構成的物理系統，稱為複合系統。例如地球與月亮就是一複合系統。忽略其體積，地球的物理特性，取決於地球的位置與速度；月球也是一樣。故此複合系統的物理特性，可由向量推演而得。而隨著時間演化，由於地球與月亮的交互作用，其向量中的任一分量，都會受到其他分量的影響。但是，地球與月球，在每一時刻的位置與速度，可以精確界定的。這似乎是顯而易見的，在古典物理中也的確是這樣。但在量子物理中卻非如此。每個子系統的特性，無法明確界定。

**1.3. 2 兩個光子的四種狀態**

現在考慮兩個光子的複合系統。兩個光子的偏振方向，可以同為水平方向；或同為垂直方向；或第一光子為水平、第二光子為垂直；或第一光子為垂直、第二光子為水平。這四種情形可分別寫成；；；。符號稱做張量乘積，是向量之間的乘法表示，定義如下：定義

 (1.17)

則

利用同樣的方法，

，，

 請注意這裡的乘法是不可交換的，也就是說。如果回想一下物理上的意義就容易明白了。“第一個光子(偏振方向)是H第二個光子是V”與第一個光子是V第二個光子是H”定義上截然不同。除此之外，張量乘積與一般乘積的特性都一樣。

 簡單起見，整本書我們將簡寫成或是，並依此類推。

**1.3. 3 兩個光子的所有狀態**

之前我們對一個光子的線偏振表示成任意一個可定義一個確實存在的偏振態。同理，在兩個光子中，最一般的表示法為

 (1.20)

 為機率，其總和為1：，此為*歸一化條件*。反之，若任意選取的符合歸一化條件，則可代表一個確實存在的雙光子偏振態。

現在我們研究一些例子。我們先看以下等式



這裡及。這狀態代表第一個光子之偏振態為，而第二個光子態為

我們再看看以下偏振態：直覺上，這應該可以看成每個光子應該有明確的偏振態：

 (1.22)

其中依此類推。把乘積展開，我們得到

(1.23)

要滿足上述方程式，我們必會得到，但是：俄兩個等式相互牴觸(譯註：根據第一個式子，；根據第二個式子，)。因此，此偏振態絕對無法寫成張量乘積的形式。

 但是，如同早先所提到的，的的確確是某個存在的物理態。我們必須承認有些態，描述的不是兩個個別而無關的光子。這些態是*糾纏的*。事實上，一個複合系統的，若物理態為任隨機選取的，則幾乎不能被寫成兩個個別態的乘積的(譯註: 此處的任意選取，是指在式子(1.20)兩個光子的物理態，其中任意可設定係數*a，b，c*以及*d*，只要符合的條件即可)。因此大部分的複合系統都是糾纏的。

|| 習題 1. 4. 考慮以下的雙光子態：





確認所有態都已被正確的歸一化。哪一些態是糾纏的？請將哪些不是糾纏的態，寫出其單光子態的張量乘積。

**糾纏的意義**

糾纏entanglement代表什麼？我們明確強調我們考慮的是對物理態的描述，而非物理態的動力學 (譯註：若要考慮物理態隨時間的變化過程，就必須考慮薛丁格方程式)。之前提到月球與地球會相互影響，但我們強調(這似乎很明顯的)在每個時刻，可以寫下地球的物理態，以及月球的物理態。反之，一個糾纏態描述的情形是：在某個時刻中，兩個光子不可能被個別描述。為什麼該這麼想？

 雖然不是不可能，既然在日常生活中不能觀察到糾纏，很難給糾纏一個直觀的意義。即使如此，物理學家還是對糾纏的光子做了許多實驗，並觀察其特性。本書以下各章會對其中一些實驗，做詳細的描述。我們以一個有趣的習題來做小結。

||習題1. 5 考慮在式(1.14)定義的。確認以下式子

如果兩個光子都以相同的基底向量測量，會有什麼結果？||

 若兩光子都以相同基底測量，都會測量到相同的結果(偏振方向)。我們說這兩個光子之間是完美的關聯。這並不是因為個別光子---例如，兩光子的偏振態皆為---有明確定義的偏振態，才有完美的關聯。回想一下糾纏的光子，其偏振態無法個別的描述出來。雖然違反直覺，但兩個無法個別明確定義的光子態，其特性卻是彼此關聯著，這使得他們的相對的偏振態，可被明確定義。如上面的例子中，雖然我們不能說兩個光子態皆為，但若其中一個測量後為，另一個也一定測量會得到。我們可以看出糾纏光子之間的關聯性。

**物理態的轉換**

我們討論了如何測量物理態，並預測其測量結果。另一個重要的觀念，是態與態之間的轉換，以及轉換所需遵守的特性。

首先，我們必須強調上述所討論的測量，是最佳的測量。換句話說，沒有比用偏振片或分光鏡，更能辨別兩個態的測量方法。這是很重要的，因為若有其更好的測量，波恩機率定則將不會正確。

 其次，近代物理假設在巨觀態之間的轉換，是一可逆的過程。這代表可轉換成，也可轉換成。這就像是向量的旋轉：可由反向的旋轉，回到原來的向量。其實可逆的轉換的確與旋轉有關。

 維格納(Wigner)證明了在量子物理所有的轉換都是線性的，並具有么正(unitary)的特性：

 ‧若一轉換***T***是線性的，則任一對向量

 (1.25)

 ‧若一轉換***U***是么正的，則其內積值不變：

 (1.26)

 維格納定理中對線性的證明是最困難的部分，在此，我們對內積值不變的必要性，作一概述。

 根據波恩機率定則，若兩物理態可被完美的辨別出來，則，若相同，則。這說明的值，是在最佳測量下，對“辨別度”的量度。

 現在，讓我們分析一下，隨轉換而變化的情形。我們假設值，會隨轉換而減少，這代表兩物理態的辨別度增加，這與最佳測量的假設不合。的確，我們可再測量之前先做轉換。若值，會隨轉換而增加，根據可逆性的假設，一定存在一種讓值減少的轉換。故唯一的選項，是讓值在可逆轉換中保持不變。

**總結**

光的偏振是電場的震盪方向，可用向量來描述。偏振片或是偏振分光鏡，是藉由測量透射與反射光強度，決定偏振方向。單光子的偏振態，可用狄拉克符號表示，經過測量儀器的的透射與反射機率，可由波恩機率定則決定。單一光子的行為，本質上是隨機的，大量的光子的統計行為，則是可預測的。若兩光子的態，無法個別表示成明確定一的單光子態，則此雙光子形成糾纏態。物理態的可逆轉換是可行的，但此轉換必須是線性以及么正的。

**延伸探討**

在本節中，我們會深入討論一些本章所提到的一些概念，包括了向量，機率，以及自由度。

**向量**

在量子理論中，向量是基本的數學工具。物理態或態向量與中學數學課中，在幾何裡學到的向量很像。主要差異在於符號：量子物理中用的是狄拉克符號，而非一般的。向量積也寫成或，而不是。

 向量可表示成各個分量之和，其中利用一組單位向量做為基底。舉例來說，

 (1.27)

在狄拉克符號中，寫成，及則分別寫成及。式(1.27)可寫成

 (1.28) 是的內積值，。同理。及也是一組基底向量，亦即符合以下條件：，且。幾何上，和為單位向量，且彼此正交。

**機率**

日常生活中，許多事情，像是擲骰子、硬幣等，都是隨機的。這代表在少數樣本時，無法預測其行為，但式樣本數夠大時，統計行為變得有規律且可預測的。在擲骰子的例子中，如果擲了很多次，一半會出現正面，一半會出現反面。機率是在大量的重複行為中，事件發生的比例。數學上，定義一事件A的機率為

 (1.29)

其中是事件A發生的次數，為發生事件總數(譯註：例如，擲出正面的次數；:擲骰子的次數)。

 任一事件A發生的機率須滿足根據定義，若，則事件A必然發生；若，則事件A絕不會出現。

 事件A和事件B若其中一事件的發生，不會影響到另一事件發生的機率，則稱兩事件是獨立的。舉例而言，若你直曬子擲出了反面，這並不會影響到下一次你擲骰子擲出正面的機率。若A，B為兩獨立事件，則，其中表示兩事件同時發生。

**自由度**

在物理或化學課，你也許會碰到“自由度”這三個字。例如單原子分子的自由度為三，雙原子分子的自由度為五。這裡的一個自由度是指分子運動中，一個可能的方式。本書中，自由度大部分指的是描述一物理系統，所需物理變數的數目。

 在一個系統裡會有很多變數，但並不是都會用的到。舉例來說，若我們的系統為一台車，其變數有車的位置、速度、它的顏色、溫度、材質等等。若我們的目標是要探討這台車的運動，則車子的顏色與運動無甚關係，可以忽略不計。反之，車子的位置與速度就非常重要，此時稱為車子的自由度。

 我們再以另一系統為例。假設我們的系統是一電子而我們想研究的運動。依舊，位置與速度是電子的自由度。它的運動方程式為，其中為電場，為電子電荷。

 然而，若要考慮電場如何隨電荷運動而變化，系統就應該包含電場與電荷。兩者的關係，可藉由馬克斯威爾方程式來表示，而分析也變得複雜。因此隨著考慮的系統不同，分析的方法也不同。

 在結束討論之前，我們藉由集合論，示範量子與古典系統之間，一個重要的差異。我們先討論古典系統：如圖1.7中，我們可用速度—位置圖，描述車子的自由度。

||圖1. 7 ||

 陰影區域標示在城市西方與中心之間的車子；小正方形圖案區域標示向右行進的車子。根據集合論中的簡單邏輯，重疊的區域標示城西與城中之間，且向右行進的車子。因此若車子的位子如圖1. 7標示的黑點，則我們知道車子位於城西與城中之間，並以每小時40公里的速率，向右往城中前進。從這例子我們知道，古典的特性，可用集合論描述。

 將此觀念一般化，假設*P*1與*P*2為兩個物理特性，且滿足*P*1與*P*2的集合，分別為*S*1與*S*2。數學的表示如下

 (1.30)

根據上述討論，我們知道

 (1.31)

 但是，這個簡單而直覺的關係，在量子理論中不成立，因為量子系統沒有明確定義的特性。

**1.7 一般參考文獻**

量子物理的科普書：

* G. C. Ghirardi, *Sneaking a look at God’s Cards* (Princeton University Press， Princeton，2003)。
* V. Scarani, *Quantum Physics: A First Encounter* (Oxford University Press，Oxford，2006)。

一般的進階教科書：

* On Classical optics ：E. Hecht, *Optics* (Addison Wesley,，San Francisco¸，2002)。
* A. Peres，*Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer，Dordrecht，1995)。
* M. Le Bellac，*A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press，Cambridge，2006)。

**1.8 習題解答**

**1.1 解答.** 要解本題，首先注意到透射光強度是入射光的倍。要算出通過最後一片的透射光強度，我們把乘起來：

 。

我們取趨近於零時，的極限。我們有

因此可推論最後一片的透射光強度，等於原始的入射光強度 *I*。但是方向已有改變。最初的入射光為水平方向，而最後的光方向為垂直方向。這實驗裝置的效果是轉動偏振方向，而不改變其強度。從文化上的角度，特別在量子物理中，這種效應是以希臘哲學家命名，叫做季諾效應。

**1.2 解答.** 假設偏振方向為根據式子(1.5)，我們發現，此時偏振方向與偏振片方向之夾角為。

同理，若偏振方向為，此時分別為：

 的差異可以測量的出來。故兩偏振方向可以加以區別。

**1.3 解答.** (1) 基底定義如下

我們可利用式(1.9)中的定義；或是直接利用式(1.12)，驗證上述關係。

(2) 利用波恩機率定則，

**1.4 解答.** 不是一糾纏態：它可寫成其他皆為糾纏態。當然，如果或，就不是糾纏態。但在其他例子中皆為糾纏態。

**1.5 解答.**